**BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ**

*№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2010*

# НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СУБЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА-БЕССЕЛЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

**С.К.АБДУЛЛАЕВ, А.А.АКПЕРОВ, М.К.КЕРИМОВ**

***Бакинский Государственный Университет***

***sadig.abdullaev@mail.ru***

*В работе рассматривается вопрос об ограниченности сублинейных операторов из довольно широкого класса, содержащего в частности, сингулярные интегральные операторы, потенциалы Рисса и Бесселя, максимальные функции, дробно-максимальные функции, интегралы Пуассона, ассоциированные дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя, в новых шкалах банаховых пространств, введенных в терминах интегральных характеристик типа* $\Omega$, $\Omega^*$.

Пусть $R_n$ - эвклидово пространство размерности $n(n \ge 1)$,

$R^+_{m+k,k} = \{x = (x_1,...,x_m, x_{m+1},...,x_{m+k}) : x_{m+1} > 0,..., x_{m+k} > 0\}$,

$$T^s u(x) = c_\nu \int_0^\pi ... \int_0^\pi u\left(x' - s', \sqrt{x^2_{m+1} - 2x_{m+1} \cdot s_{m+1} \cos\alpha_{m+1} + s^2_{m+1}},...,\right.$$

$$\left.\sqrt{x^2_{m+k} - 2x_{m+k} \cdot s_{m+k} \cos\alpha_{m+k} + s^2_{m+k}}\right) \sin^{2\nu_{m+1}-1}\alpha_{m+1} ... \sin^{2\nu_{m+k}-1}\alpha_{m+k}\, d\alpha_{m+1}...d\alpha_{m+k} -$$

оператор обобщенного сдвига $(OOC)$, порожденный дифференциальным оператором Лапласа- Бесселя [1]:

$$\Delta_B(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=m+1}^{m+k} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2\nu_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right],$$

где $x = (x', x_{m+1},..., x_{m+k})$, $s = (s', s_{m+1},..., s_{m+k})$, $x', s' \in R_m$, $\nu_{m+1} > 0,..., \nu_{m+k} > 0$, $c_\nu$ – постоянная, такая, что $T^s 1 = 1$, $\nu = (\nu_{m+1},..., \nu_{m+k})$, $|\nu| = \nu_{m+1} + ... + \nu_{m+k}$.

Пусть $1 \le p < \infty$, $d\mu(x) = \prod_{i=1}^{m+k} d\mu(x_i)$, $d\mu(x_i) = \begin{cases} dx_i, & i \in \{1,...,m\}; \\ x_i^{2\nu_i} dx_i, & i \in \{m+1,...,m+k\}, \end{cases}$

и $\omega(t)$, $t > 0$, измеримая почти всюду положительная функция.

Положим

$$L_{p,\nu}(\omega, R^+_{m+k,k}) \overset{\text{df}}{=} \left\{ u - \text{изм.}: \|u : L_{p,\nu}(\omega)\| \overset{\text{df}}{=} \left( \int_{R^+_{m+k,k}} |u(x)|^p \omega(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},\ L_{p,\nu}(1) \equiv L_{p,\nu}.$$

Пусть $1 < p \le \infty$. По определению [5] сублинейный оператор $A$ принадлежит классу $\overline{K}_\nu(p,q)$, если $A: L_{p,\nu} \to L_{q,\nu}$ ограничен и для любой функции $u \in L_{p,\nu}\left(R^+_{m+k,k}\right)$ с компактным носителем при $x \in \operatorname{supp} u$

$$\left|Au(x)\right| \le c \int\limits_{R^+_{m+k,k}} |s|^{-\beta} T^s \left|u(x)\right| d\mu(s),$$

где $\beta = \left(m + k + 2|\nu| - \alpha\right)$.

В случае $p = q$ операторы $A \in \overline{K}(p, p)$ могут быть сингулярными.

Рассмотрим $B_{m+k,2\nu}$ - интеграл Пуассона:

$$\left(U_\nu f\right)(x,t) = a_\nu \int\limits_{R^+_{m+k,k}} t\left(t^2 + |y|^2\right)^{-\frac{m+k+1+2|\nu|}{2}} f(y)\, d\mu(y),\ \left(U_\nu f\right)(x) \overset{df}{=} \sup_{t>0}\left(U_\nu f\right)(x,t)\ ;$$

$B_{m+k,2\nu}$ - максимальную функцию:

$$M_B f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \left|B(0,\varepsilon)\right|_\nu^{-1} \int\limits_{B(0,\varepsilon)} T^y \left|f(x)\right| d\mu(y),\quad B(0,\varepsilon) = \left\{y \in R^+_{m+k,k} : |y| < \varepsilon\right\},$$

$$\left|B(0,\varepsilon)\right|_\nu = \int\limits_{B(0,\varepsilon)} d\mu(x)\ ;$$

$B_{m+k,2\nu}$ - дробно максимальную функцию:

$$M^\alpha_{B_{m+k,2\nu}} f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \left|B(0,\varepsilon)\right|_\nu^{\frac{\alpha}{m+k+2|\nu|}-1} \int\limits_{B(0,\varepsilon)} T^y \left|\, f(x)\right| d\mu(y)\,;$$

$B_{m+k,2\nu}$ - потенциал Рисса:

$$I^\alpha_{B_{m+k,2\nu}} f(x) = \int\limits_{R^+_{m+k,k}} T^y |x|^{\alpha-(m+k)-2|\nu|} f(y) d\mu(y)\ .$$

Имеют место соотношения [5]: $U_\nu,\ M_B \subset \overline{K}_\nu(p,p)$ при $p > 1$, $M^\alpha_{B_{m+k,2\nu}}$, $I^\alpha_{B_{m+k,2\nu}} \in \overline{K}_\nu(p,q)$ при $1 < p < q < \infty$ и $\alpha = \left(m + k + 2|\nu|\right)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$.

В дальнейшем $c$ положительная постоянная, различная в разных неравенствах: $a_i = 0$ при $i \in \{1,\dots,m\}$, $a_i = 2\nu_i$ при $i \in \{m+1,\dots,m+k\}$, $b_i = 2|\nu| - a_i$, $i = \overline{1,m+k}$.

Обозначим через $A_{p,\nu}(x_i)$ $\left(A^*_{p,\nu}(x_i)\right)$, $i = \overline{1, m+k}$, совокупность всех измеримых функций, суммируемых в $p$-ой степени с весом $x^{2\nu_{m+1}}_{m+1} \dots x^{2\nu_{m+k}}_{m+k}$ на множестве $\left\{x \in R^+_{m+k,k} : |x_i| \ge \xi\right\}$ $\left(\left\{x \in R^+_{m+k,k} : |x_i| \le \xi\right\}\right)$ при любом $\xi > 0$.

Для функций $u \in A_{p,\nu}(x_i)$ и $\upsilon \in A^*_{p,\nu}(x_i)$ введем характеристики

$$\Omega_{p,i}(u,\xi) = \left\{ \int\limits_{\left\{R^+_{m+k,k} : |x_i| \ge \xi\right\}} \left|u(x)\right|^p d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\Omega^*_{p,i}(\upsilon,\xi)=\left\{\int\limits_{\{R^+_{m+k,k}:|x_i|\le\xi\}}|\upsilon(x)|^p\,d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}},\quad \xi>0,\ i=\overline{1,m+k},$$

а также множества

$$J_{p,v}(x_i)=\left\{u\in A_{p,v}(x_i):\int\limits_0^{\xi}\Omega_{p,i}(\omega,t)\cdot t^{\frac{1+a_i}{p'}}\,dt<\infty,\ \forall\,\xi>0\right\},$$

$$J^*_{p,v}(x_i)=\left\{u\in A^*_{p,v}(x_i):\int\limits_{\xi}^{\infty}\Omega^*_{p,i}(\upsilon,t)\cdot t^{-\left(\frac{1+a_i}{q}+1\right)}dt<\infty,\ \forall\,\xi>0\right\}.$$

Для каждого $i=1,2,...,m+k$ разобьем $R^+_{m+k,k}$ на прямую сумму пространств $R_{m+k-1,i}$ и $R_{1,i}$, где

$$R_{1,i}=\begin{cases}(-\infty,+\infty), & i\in\{1,...,m\};\\ (0,+\infty), & i\in\{m+1,...,m+k\},\end{cases}$$

а $R_{m+k-1,i}$ – ортогональное дополнение $R_{1,i}$ в $R^+_{m+k,k}$. Точки пространств $R_{m+k-1,i}$ и $R_{1,i}$ обозначим, соответственно, через $\hat{y}_i$ и $y_i$, так что $y=\uparrow(\hat{y}_i,y_i)$. При этом будем пользоваться также обозначениями $u(y_1,...,y_{m+k})=u(\hat{y}_i,y_i)$.

Всюду в дальнейшем $X_E(t)$ – характеристическая функция множества $E\subset(-\infty,+\infty)$.

Положим

$$u_{\xi,i}(y)=X_{[0,\xi]}(|y_i|)u(y),\qquad u^*_{\xi,i}(y)=X_{[\xi,\infty)}(|y_i|)u(y),$$

$$\tilde{u}_{\xi,i}(y)=\left(\int\limits_{R_{m+k-1,i}}u^p_{\xi,i}(\hat{y}_i,y_i)\,d\mu(\hat{y}_i)\right)^{\frac{1}{p}},\qquad \tilde{u}^*_{\xi,i}(y)=\left[\int\limits_{R_{m+k-1,i}}u^{*\,p}_{\xi,i}(\hat{y}_i,y_i)\,d\mu(\hat{y}_i)\right]^{\frac{1}{p}},$$

$$I_{\beta,i}(u,\xi)(x)=\int\limits_{R^+_{m+k,k}}\frac{u_{\xi,i}(y)\,d\mu(y)}{\left(|\hat{x}_i-\hat{y}_i|+|x_i|+\xi\right)^{\beta}},\quad I^*_{\beta,i}(u,\xi)(x)=\int\limits_{R^+_{m+k,k}}\frac{u^*_{\xi,i},(u,\xi)}{\left[|\hat{x}_i-\hat{y}_i|+|y_i|+\xi\ \right]^{\beta}},$$

где $x\in R^+_{m+k,k}$, $p'=p/(p-1)$.

Справедливы следующие леммы [4].

**Лемма 1.** Пусть $u\in A_{p,v}(x_i)$, $1<p\le q\le\infty$, $\beta\,p'>m+k-1$. Тогда $\exists\ c>0$, $\forall\ \varepsilon>0$ справедливы оценки

$$\text{а)}\ I_{\beta,i}(u,\xi)(x)\le\left(|x_i|+\sum_{\substack{j=m+1\\ j\ne i}}^{m+k}x_j\right)^{\frac{b_i}{p'}}\cdot|x_i|^{\frac{m+k-1}{p'}-\beta}\cdot\int\limits_{\{R_{1,i}:|y_i|\le\xi\}}\tilde{u}_{\xi,i}(y_i)\,d\mu(y_i);$$

б) $\left\| I_{\beta,i}(u,\xi) : L_{q,v}\left(R^{+}_{m+k,k}\right)\right\| \le c\cdot \xi^{-\frac{1+a_i}{p'}} \int\limits^{0}_{\{R_{1,i}:|y_i|\le\xi\}} \overset{0}{u}_{\xi,i}(y_i)\, d\mu(y_i)$,

где постоянная $c$ не зависит от $\xi$ и $u$.

**Лемма $1'$.** Пусть $u\in A^{*}_{p,v}(x_i)$, $1<p\le q<\infty$. Тогда $\exists\ c>0$, $\forall \xi>0$ справедливы оценки

а) $I^{*}_{\beta,i}(u,\xi)(x) \le \int\limits_0^{\infty} \left(|y_i|+\xi\right)^{\frac{m+k-1}{p'}-\beta} \left(|y_i|+\xi+\sum\limits_{\substack{j=m+1\\ j\ne i}}^{m+k} x_j\right)^{\frac{b_i}{p'}} \cdot \overset{0}{u}{}^{*}_{\xi,i}(y_i)\, d\mu(y_i)$;

б) $\left\| I^{*}_{\beta,i}(u,\xi) : L_{q,v}\left(R^{+}_{m+k,k}\right)\right\| \le c\cdot \xi^{\frac{a_i+1}{q}} \int\limits_{\{R_{1,i}:|y_i|\ge\xi\}} \left(|y_i|+\xi\right)^{\frac{m+k-1+b_i}{r}-\beta} \cdot \overset{0}{u}{}^{*}_{\xi,i}(y_i)\, d\mu(y_i)$,

где $\frac{1}{r}=\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}$, постоянная с не зависит от $x$ и $\xi$.

Имеют место также следующие леммы [4].

**Лемма 2.**

а) Пусть $u\in A_{p,v}(x_i)$, $1<p<\infty$. Тогда справедлива оценка

$$\left( \int\limits_{\{R_{1,i}:\eta\le|y_i|\le\xi\}} \left(\overset{0}{u}_{\xi,i}(y_i)\right)^p d\,\mu(y_i)\right)^{\frac{1}{p}} \le c\cdot \Omega_{p,i}(u,t) \quad \forall\ \xi>0;$$

б) Пусть $u\in J_{p,v}(x_i)$. Тогда

$$\int\limits_{\{R_{1,i}:|y_i|\le\xi\}} \overset{0}{u}_{\xi,i}(y_i)\, d\mu(y_i) \le c\int\limits_0^{\xi} t^{\frac{1+a_i}{p'}-1}\,\Omega_{p,i}(u,t)\,dt\ ,$$

где $t>0$, постоянная $c$ не зависит от $x,\xi$ и $t$.

**Лемма $2'$.**

а) Пусть $u\in A^{*}_{p,v}(x_i)$, $1<p<\infty$. Тогда справедливо неравенство

$$\left( \int\limits_{\{R_{1,i}:|y_i|\le t\}} \left(\overset{0}{u}{}^{*}_{\xi,i}(y_i)\right)^p d\,\mu(y_i)\right)^{\frac{1}{p}} \le c\cdot \Omega^{*}_{p,i}(\upsilon,t) \quad \forall\ \xi>0;$$

б) Пусть $u\in J^{*}_{p,i}(x_i)$. Тогда

$$\int\limits_{\{R_{1,i}:|y_i|\ge\xi\}} |y|^{\frac{m+k-1+b_i}{r}-\beta} \cdot \overset{0}{u}{}^{*}_{\xi,i}(y_i)\, d\,\mu(y_i) \le \int\limits_0^{\xi} t^{-\left(\frac{1+a_i}{q}+1\right)} \cdot \Omega^{*}_{p,i}(\upsilon,t)\,d\,t,$$

где $t>0$, постоянная $c$ не зависит от $x$, $\xi$ и $t$.

Следующие две теоремы являются отправным пунктом для дальнейших рассуждений.

**Теорема 1.** Пусть $u \in J_{p,v}(x_i)$ и $A \in \overline{K}_v(p,q)$. Тогда для почти всех $x \in R^+_{m+k,k}$ существует $\upsilon(x) = Au(x)$ и имеет место оценка

$$\Omega_{q,i}(u,\xi) \le c \cdot \xi^{-\frac{1+a_i}{p'}} \int_0^{\xi} \Omega_{p,i}(u,t) t^{-\frac{1+a_i}{p'}-1} dt, \qquad (2)$$

где $i = \overline{1, m+k}$, постоянная $c$ не зависит от $u$ и $\xi$.

**Доказательство.** Пусть $u \in J_{p,i}(x_i)$ и $A \in \overline{K}_v(p,q)$. Докажем, что $\upsilon(x)$ существует для почти всех $x \in R^+_{m+k,k}$. Возьмем произвольное фиксированное $\xi \in (0,\infty)$ и представим функцию $u(y)$ в виде суммы $u = u_1 + u_2$, где $u_1(y) = \chi_{[0,\xi]}(|y_i|)u(y)$, $u_2(y) = u(y) - u_1(y)$. Очевидно, что $u_2(x) = \chi_{[\xi,+\infty)}(|x_i|)u(x)$. Тогда $u_2 \in L_{p,v}(R^+_{m+k,k})$ и $Au_2(x)$ существует почти для всех $x \in R^+_{m+k,k}$. Теперь докажем, что $Au_1(x)$ сходится для всех точек $x \in \{R^+_{m+k,k} : |x_i| > \xi\}$.

Отметим, что если $\beta > 0$, то $T^y(|x|^{-\beta}) \le c|x-y|^{-\beta}$ и, кроме того, если $x \in \{R^+_{m+k,k} : |x_i| > \xi\}$ и $|y_i| \le \dfrac{\xi}{2}$, то $c(|\hat{x}_i - \hat{y}_i| + |x_i| + \xi)^{-\beta} \le |x-y|^{-\beta} \le c_1(|\hat{x}_i - \hat{y}_i| + |x_i| + \xi)^{-\beta}$. Учитывая это и самосопряженность оператора $T^s$, получим

$$|Au_1(x)| = c \int_{R^+_{m+k,k}} \frac{|u_1(y)|\, d\mu(y)}{(|\hat{x}_i - \hat{y}_i| + |x_i| + \xi)^{\beta}} \le c\left[|x_i| + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j\ne i}}^{m+k} x_j\right]^{\frac{b_i}{p'}} \cdot |x_i|^{\frac{m+k-1}{p'}} \cdot \int_{\{R_{1,i} : |y_i| \le \xi\}} u_{\xi,i}(y_i)\, d\mu(y_i) < +\infty \cdot$$

А теперь докажем оценку (2). Возьмём $\xi > 0$ и переобозначим $u_1(x) = u_{1,\xi}(x)$, $u_2(x) = u_{2,\xi}(x)$. Имеем

$$\Omega_{q,i}(\upsilon,\xi) \le \left( \int_{\{R^+_{m+k,k} : |x_i| \ge \xi\}} \left( |Au_{1,\xi}(x)|^q \, d\mu(x) \right) \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \int_{\{R^+_{m+k,k} : |x_i| \ge \xi\}} \left( |Au_{2,\xi}(x)|^q \, d\mu(x) \right) \right)^{\frac{1}{q}} = i_1 + i_2 .$$

В силу условия $A \in \overline{K}_v(p,q)$ получаем

$$i_2 \le \left( \int_{\{R^+_{m+k,k} : |x_i| \ge \xi\}} \left( |Au_{2,\xi}(x)|^q \, d\mu(x) \right) \right)^{\frac{1}{q}} \le c_A \cdot \Omega_{p,i}(u, \xi/2) .$$

Для $i_1$, используя оценку

$$|Au_{1,\xi}(x)| \le c \cdot I_{\beta,i}(u,\xi)(x)$$

и применяя леммы 1 и 2, получаем

$$i_1 \le c \cdot \xi^{-\frac{1+a_1}{p'}} \int_0^{\xi} t^{\frac{1+a_i}{p'}-1} \, \Omega_{p,i}(u,t)dt .$$

Теорема 1 доказана.

Аналогично доказывается

**Теорема $1'$.** Пусть $u \in J^*(x_i)$ и $A \in \overline{K}_\nu(p,q)$. Тогда для почти всех $x \in R^+_{m+k,k}$ существует $\upsilon(x) = Au(x)$ и имеет место оценка

$$\Omega^*_{q,i}(\upsilon,\xi) \le c \cdot \xi^{\frac{1+a_i}{q}} \int\limits_{\xi}^{\infty} \Omega^*_{p,i}(\upsilon,t) \cdot t^{-\left(\frac{1+a_i}{q}+1\right)} dt \, . \qquad (2')$$

Оценки, полученные в терминах $\Omega, \Omega^*$ характеристик, позволяют доказать совершенно новые по содержанию теоремы о свойствах операторов из $\overline{K}(p,q)$ в пространствах, введенных в терминах этих характеристик.

По определению, функция $\alpha(t)$, $0 < t < \infty$, принадлежит множеству $N$ $\left(N^*\right)$, если $\alpha(t) \ge 0$, причем $\alpha(t) > 0$ для почти всех $t \in (0,\varepsilon)$ $\left(t \in (\varepsilon,\infty)\right)$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Пусть $1 \le p < \infty$. Для $\varphi \in N$ и $\psi \in N^*$ введем $B$ – пространства

$$I_{p,\infty,i}(\varphi) = \left\{ u - \text{изм.}: \quad \left\| u : I_{p,\infty,i}(\varphi) \right\| \overset{\text{df}}{=} \sup_{\xi>0} \Omega_p(u,\xi)\varphi(\xi) < \infty \right\},$$

$$I^*_{p,\infty,i}(\psi) = \left\{ u - \text{изм.}: \quad \left\| u : I_{p,\infty,i}(\psi) \right\| \overset{\text{df}}{=} \sup_{\xi>0} \Omega^*_p(u,\xi)\psi(\xi) < \infty \right\}.$$

$$\overset{\circ}{I}_{p,\infty,i}(\varphi) = \left\{ u \in I_{p,\infty,i}(\varphi): \quad \Omega_p(u,\xi)\varphi(\xi) \underset{\xi\to 0}{\to} 0 \right\},$$

$$\overset{\circ}{I}{}^*_{p,\infty,i}(\psi) = \left\{ u \in I^*_{p,\infty,i}(\psi): \quad \Omega^*_p(u,\xi)\psi(\xi) \underset{\xi\to 0}{\to} 0 \right\}.$$

Очевидно, что $\overset{\circ}{I}_{p,\infty,i}(\varphi)$ $\left(\overset{\circ}{I}{}^*_{p,\infty,i}(\varphi)\right)$ является подпространством $I_{p,\infty,i}(\varphi)$ $\left(I^*_{p,\infty,i}(\psi)\right)$.

По определению, $\alpha$ принадлежит классу $N_1$ $\left(N_1^*\right)$, если $\alpha \in N$ $\left(\alpha \in N^*\right)$ и $\forall\ \varepsilon > 0$ сходится интеграл $\int\limits_0^\varepsilon \alpha(t)dt$ $\left(\int\limits_\varepsilon^\infty \alpha(t)dt\right)$.

Пусть $1 \le p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$. Для $\varphi \in N_1$ и $\psi \in N_1^*$ введем пространства

$$I_{p,\theta,i}(\varphi) = \left\{ u - \text{изм.} \quad \left\| u : I_{p,\theta,i}(\varphi) \right\|^\theta \overset{\text{df}}{=} \int\limits_0^\infty \Omega^\theta_{p,i}(u,\xi)\varphi(\xi)d\xi < \infty \right\},$$

$$I^*_{p,\theta,i}(\psi) = \left\{ u - \text{изм.} \quad \left\| u : I^*_{p,\theta,i}(\psi) \right\|^\theta \overset{\text{df}}{=} \int\limits_0^\infty \left(\Omega^*_{p,i}(u,\xi)\right)^\theta \psi(\xi)d\xi < \infty \right\}.$$

Доказывается, что при $\theta = p$ пространства $I_{p,p,i}(\varphi)$ и $I^*_{p,p,i}(\psi)$ совпадают с некоторыми весовыми $L_{p,\nu}$ пространствами, а именно, имеет место

**Лемма 3.** Пусть $\varphi \in N_1$ $\left(\psi \in N_1^*\right)$, $\omega(t)=\int\limits_0^t \varphi(\xi)d\xi$ $\left(\omega^*(t)=\int\limits_t^\infty \psi(t)dt\right)$ $t>0$.

Тогда

$$I_{p,p,i}(\varphi)=L_{p,\nu}\left(\omega\left(\,|x_i|\,\right),\ R^+_{m+k,k}\right)\ \left(I^*_{p,p,i}(\psi)=L_{p,\nu}\left(\omega^*\left(\,|x_i|\,\right),\ R^+_{m+k,k}\right)\right)$$

и соответствующие нормы эквивалентны.

Легко видеть, что $\omega(t)$ – возрастающая, а $\omega^*(t)$ – убывающая весовые функции.

Приведем некоторые теоремы о действии оператора $A\in\overline{K}(p,q)$ в шкале пространств $I_{p,\infty,i}(\varphi)$, $I_{p,\infty,i}(\psi)$, $I^*_{p,\infty,i}(\varphi)$, $\overset{\circ}{I}{}^*_{p,\infty,i}(\psi)$.

С этой целью рассмотрим операторы

$$Z:\varphi\in N\to Z(\varphi)=\xi^{-\frac{(1+a_i)}{p'}}\int\limits_0^\xi \varphi^{-1}(t)t^{\frac{1+a_i}{p'}-1}dt,$$

$$Z^*:\psi\in N^*\to Z^*(\psi)=\xi^{\frac{(1+a_i)}{q}}\int\limits_\xi^\infty \psi^{-1}(t)t^{-\left(\frac{1+a_i}{q}+1\right)}dt.$$

Легко заметить, что операторы $Z$ и $Z^*$ сохраняют $O$ и $o$ отношения.

**Лемма 4.** Пусть $\varphi\in N$ $\left(\psi\in N^*\right)$ и $\forall\ \xi>0$ сходится интеграл

$$\int\limits_0^\xi \frac{t^{\frac{1+a_i}{p'}}}{\varphi(t)}\frac{dt}{t}\qquad\left(\int\limits_\xi^\infty \frac{1}{\psi(t)t^{\frac{1+a_i}{q}}}\frac{dt}{t}\right). \tag{2}$$

Тогда

$$I_{p,\infty,i}(\varphi)\subset J_{p,\nu}(x_i), \tag{3}$$

$$I^*_{p,\infty,i}(\psi)\subset J^*_{p,\nu}(x_i). \tag{3'}$$

**Доказательство.** Пусть $u\in I_{p,\infty,i}(\varphi)$. Тогда

$$\int\limits_0^\xi \frac{\Omega_{p,i}(u,t)\cdot t^{\frac{1+a_i}{p'}}}{t}dt=\int\limits_0^\xi \frac{\Omega_{p,i}(u,t)\varphi(t)\cdot t^{\frac{1+a_i}{p'}}}{\varphi(t)\cdot t}dt\le\left\|u:\ I_{p,\infty,i}(\varphi)\right\|\int\limits_0^\xi \frac{t^{\frac{1+a_i}{p'}}}{\varphi(t)\cdot t}dt<\infty.$$

Откуда следует справедливость включения (3). Включение ($3'$) доказывается аналогично.

**Теорема 2.** Пусть $1<p\le q<\infty$, $A\in\overline{K}_\nu(p,q)$, $\varphi\in N$ $\left(\psi\in N^*\right)$ и сходится интеграл (2). Тогда оператор $A$ действует из $I_{p,\infty,i}(\varphi)$, $I^0_{p,\infty,i}(\varphi)$ $\left(I^*_{p,\infty,i}(\psi),\ \overset{\circ}{I}{}^*_{p,\infty,i}(\psi)\right)$ в $I_{p,\infty,i}\left(Z^{-1}(\varphi)\right)$, $I^0_{p,\infty,i}\left(Z^{-1}(\varphi)\right)$ $\left(I^*_{p,\infty,i}\left(Z^*(\psi)^{-1}\right),\ \overset{\circ}{I}{}^*_{p,\infty,i}\left(Z^*(\psi)^{-1}\right)\right)$ соответственно и ограничен.

Доказательство теоремы 2 следует непосредственно из определения этих пространств, с учетом свойств операторов $Z$, $Z^*$, леммы 4 и теоремы 1 (теоремы $1'$).

Для изучения оператора $A \in \overline{K}_v(p,q)$ в шкале пространств $I_{p,\theta,i}(\varphi)$, $I^0_{p,\theta,i}(\varphi)$, нам нужна следующая

**Теорема [2, 3].** Пусть $1 \le \theta \le \theta_1 \le \infty$, $\theta' = \dfrac{\theta}{\theta-1}$ и $u(t)$, $\upsilon(t)$ - положительные на $(0,+\infty)$ функции. Тогда

1) Для справедливости неравенства

$$\left(\int_0^\infty u(t)\left|\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau\right|^{\theta_1} dt\right)^{\frac{1}{\theta_1}} \le k_1\left(\int_0^\infty |\varphi(t)|^\theta \upsilon(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

с постоянной $k_1$, не зависящей от $\varphi$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty u(\tau)d\tau\right)^{\theta/\theta_1}\left(\int_0^t (\upsilon(\tau))^{1-\theta'}\,d\tau\right)^{\theta-1} < \infty\ ;$$

2) Для справедливости неравенства

$$\left(\int_0^\infty u(t)\left|\int_t^\infty \varphi(\tau)d\tau\right|^{\theta_1} dt\right)^{\frac{1}{\theta_1}} \le k_2\left(\int_0^\infty |\varphi(t)|^\theta \upsilon(t)dt\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

с постоянной $k_2$, не зависящей от $\varphi$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty u(\tau)d\tau\right)^{\theta/\theta_1}\left(\int_0^t (\upsilon(\tau))^{1-\theta'}\,d\tau\right)^{\theta-1} < \infty.$$

**Лемма 5.** Пусть $1<p\le q<\infty$, $1<\theta<\infty$, $i\in\{1,\dots,m+k\}$, $\varphi\in N_1$ $\left(\psi\in N_1^*\right)$, $\beta=(1+a_i)/p'$, $(\gamma=(1+a_i)/q)$ и сходится интеграл

$$\int_0^\xi (\varphi(t))^{1-\theta'}\cdot t^{(\beta-1)\theta'}\,dt \qquad \left(\int_t^\infty (\psi(\xi))^{1-\theta'}\cdot \xi^{(\gamma+1)}\,d\xi\right). \tag{4}$$

Тогда $I_{p,\theta,i}(\varphi)\subset J_{p,\nu}(x_i)$ $\left(I^*_{p,\theta,i}(\psi)\subset J^*_{p,\nu}(x_i)\right)$.

**Доказательство.** Пусть $u\in I_{p,\theta,i}(\varphi)$. Возьмём $\xi>0$. Тогда имеем

$$\int_0^\xi \Omega_{p,i}(u,t)\cdot t^{\frac{1+a_i}{p'}-1}\,dt = \int_0^\xi \Omega_{p,i}(u,t)[\cdot\varphi(t)]^{\frac{1}{\theta}}\cdot[\varphi(t)]^{-\frac{1}{\theta}}\cdot t^{\beta-1}dt \le$$

$$\le\left(\int_0^\xi [\Omega_{p,i}(u,t)]^\theta \varphi(t)dt\right)^{\frac{1}{\theta}}\cdot\left(\int_0^\xi\left([\varphi(t)]^{-\frac{1}{\theta}}\cdot t^{(\beta-1)}\right)^{\theta'}dt\right)^{\frac{1}{\theta'}} \le c(u)\left(\int_0^\xi [\varphi(t)]^{1-\theta'}\cdot t^{(\beta-1)\theta'}\,dt\right)^{\frac{1}{\theta'}} < \infty.$$

Случай $u\in I^*_{p,\theta,i}(\varphi)$ рассматривается аналогично.

Лемма 5 доказана.

**Теорема 3.** Пусть $1<p\le q<\infty$, $1<\theta\le\theta_1<\infty$, $A\in\overline{K}_v(p,q)$, $\varphi,\psi\in N_1$, $i\in\{1,2,...,m+k\}$ и выполняется условие

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^{\infty}\psi(\xi)\xi^{-\beta\theta_1}\,d\xi\right)^{\frac{1}{\theta_1}}\left(\int_0^t[\varphi(t)]^{1-\theta'}\cdot t^{(\beta-1)\theta'}\,dt\right)^{\frac{1}{\theta'}}<\infty\ ,\ \left(\beta=(1+a_i)/p'\right). \qquad (5)$$

Тогда оператор А действует из $I_{p,\theta,i}(\varphi)$ в $I_{q,\theta_1,i}(\psi)$ и имеет место неравенство

$$\left\|Au:I_{q,\theta_1,i}(\psi)\right\|\le c\left\|u:I_{p,\theta,i}(\varphi)\right\|,$$

где постоянная $c$ не зависит от функции $u$.

**Доказательство.** В силу (5) сходится интеграл (4), откуда, в силу леммы 4, $I_{p,\infty,i}(\varphi)\subset J_{p,i}(x_i)$ и, следовательно, справедлива теорема 1. Тогда, в силу оценки (2), применяя теорему Харди, получаем

$$\left(\int_0^{\infty}\left(\Omega_{q,i}(u,\xi)\right)^{\theta_1}\psi(\xi)\,d\xi\right)^{\frac{1}{\theta_1}}\le c\left(\int_0^{\infty}\left(\xi^{-\beta}\int_0^{\xi}\frac{\Omega_{p,i}(u,t)}{t^{1-\beta}}\,dt\right)^{\theta_1}\psi(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{\theta_1}}=$$

$$=\left(\int_0^{\infty}\xi^{-\beta\cdot\theta_1}\psi(\xi)\left(\int_0^{\xi}\Omega_{p,i}(u,t)\cdot t^{\beta-1}dt\right)^{\theta_1}d\xi\right)^{\frac{1}{\theta_1}}\le c\left(\int_0^{\infty}\Omega_{p,i}^{\theta}(u,t)\,\varphi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 3 доказана.

Аналогично доказывается

**Теорема 4.** Пусть $1<p\le q<\infty$, $1<\theta\le\theta_1<\infty$, $A\in\overline{K}_v(p,q)$, $\varphi^*,\psi^*\in N_1^*$, $i\in\{1,2,...,\ m+k\}$ и выполняется условие

$$\sup_{t>0}\left(\int_0^t\psi(\xi)\,\xi^{\frac{1}{\theta_1}}\,d\xi\right)^{\frac{\theta}{\theta_1}}\left(\int_t^{\infty}[\varphi(\xi)]^{1-\theta'}\,\xi^{(\gamma-1)\,\theta}d\xi\right)^{\theta-1}\ ,\ \left(\gamma=(1+a_i)/q\right). \qquad (5')$$

Тогда оператор $A$ действует из $I_{p,\theta,i}^*(\varphi)$ в $I_{q,\theta_1,i}^*(\psi)$ и имеет место неравенство

$$\left\|Au:I_{q,\theta_1,i}^*(\psi)\right\|\le c\left\|u:I_{p,\theta,i}^*(\varphi)\right\|,$$

где постоянная $c$ не зависит от функции $u$.

**Доказательство.** Поступая так же, как и в теореме 3, получаем

$$\left(\int_0^{\infty}\Omega_q^*(u,\xi)^{\theta_1}\ \psi(\xi)\,d\xi\right)^{\frac{1}{\theta_1}}\le c\left(\int_0^{\infty}\left(\xi^{\gamma}\int_{\xi}^{\infty}\Omega_p^*(u,t)\,t^{-(1+\gamma)}\,dt\right)^{\theta_1}\psi(\xi)\,d\xi\right)^{\frac{1}{\theta_1}}=$$

$$= \left( \int_0^{\xi} \xi^{\theta_1 \gamma} \psi(\xi) \left( \int_t^{\infty} \Omega_p^*(u,t) \cdot t^{-(1+\gamma)}\, dt \right)^{\theta_1} d\xi \right)^{\frac{1}{\theta_1}} \le c \left( \int_0^{\infty} \Omega_p^{*\theta}(u,t) \varphi(t) dt \right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 4 доказана.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи матем. наук, 1951, т. 6, №2, с.102-143.
2. Абдуллаев С.К. О некоторых классах интегральных операторов в пространствах суммируемых функций // ДАН СССР, 1985, т.283, № 4, с.777-780.
3. Алиев И.А., Гаджиев А.Д. Весовые оценки сингулярных интегралов, порожденных оператором обобщенного сдвига // Математический сборник, 1992, т.183, № 9, с.45-66.
4. Abdullayev S.K., Akbarov A.A. Kerimov M.K. Some estimates of singular operator and weakly singular integrals generated by genarlized shift // Proceedings of International Conference on a theme “The actual problems of mathematics and computers science” Baku, 2009, p. 143-150.
5. Абдуллаев С.К., Акперов А.А., Керимов М.К. Двухвесовые оценки для сублинейных операторов, ассоциированных дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя // Вестник Брянского Государственного Университета, серия точных и естественных наук, 2009, № 4, с. 6-14.


## LAPLAS –BESSEL DİFERENSİAL OPERATORUNUN DOĞURDUĞU SUBXƏTTİ OPERATORLAR ÜÇÜN BƏZİ QİYMƏTLƏNDİRMƏLƏR VƏ ONLARIN TƏTBİQLƏRİ


**S.K.ABDULLAYEV, A.Ə.ƏKBƏROV, M.K.KƏRİMOV**



**XÜLASƏ**

İşdə $\Omega, \Omega^*$ inteqral xarakteristikalar terminində verilmiş yeni Banax fəzaları şkalasında xüsusi halda sinqulyar inteqral operatorları, Riss və Bessel potensiallarını, maksimal funksiyaları, kəsr- maksimal funksiyaları, Puasson inteqralını özündə saxlayan kafi qədər geniş sinifdən olan subxətti operatorların məhdudluğu məsələsinə baxılmışdır.


## SOME ESTIMATION FOR SUB-LINEAR OPERATORS ASSOCIATED WITH LAPLACE-BESSEL DIFFERENTIAL OPERATOR AND THEIR APPLICATIONS


**S.K.ABDULLAYEV, A.A.AKBAROV, M.K.KARIMOV**



**SUMMARY**

The paper deals with the problem of boundedness of sub-linear operators from a very wide class containing, in particular, singular integral operators, Riesz and Bessel potentials, maximal functions, fractional-maximal functions, Pousson integrals associated with Laplace-Bessel differential operator in new scales of Banach spaces introduced in the terms of integral characteristics of type $\Omega, \Omega^*$.